Волновое уравнение для электромагнитного поля

Переменное электрическое поле порождает переменное магнитное и наоборот. Если возбудить с помощью колеблющихся зарядов переменное электромагнитное поле, то в окружающем заряды пространстве возникнет электромагнитная волна.

Рассмотрим однородную электронейтральную ($\rho = 0$) непроводящую ($\vec{j} = 0$) среду с постоянными проницаемостями ε, μ. Рассмотрим связи векторов напряженности и индукции/электросмещения полей:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{1}$$

$$(\vec{\nabla}; \vec{B}) = \mu\mu_0 (\vec{\nabla}; \vec{H}), \quad (\vec{\nabla}; \vec{D}) = \varepsilon\varepsilon_0 (\vec{\nabla}; \vec{E}) \tag{2}$$

Учитывая эти связи, запишем уравнения Максвелла:

$$[\vec{\nabla}; \vec{E}] = -\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad (\vec{\nabla}; \vec{H}) = 0 \tag{3}$$

$$[\vec{\nabla}; \vec{H}] = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (\vec{\nabla}; \vec{E}) = 0 \tag{4}$$

Возьмем ротор от обеих частей левого уравнения (3):

$$[\vec{\nabla}; [\vec{\nabla}; \vec{E}]] = -\mu\mu_0 [\vec{\nabla}; \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}] \tag{5}$$

Поскольку $[\vec{\nabla}; \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}] = \frac{\partial}{\partial t}[\vec{\nabla}; \vec{H}]$, получаем:

$$[\vec{\nabla}; [\vec{\nabla}; \vec{E}]] = -\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \tag{6}$$

$[\vec{\nabla}; [\vec{\nabla}; \vec{E}]] = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}; \vec{E}) - (\vec{\Delta}; \vec{E})$, но дивергенция потенциального поля равна нулю, поэтому:

$$(\vec{\Delta}; \vec{E}) = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \tag{7}$$

Известно, что $\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$:

$$(\vec{\Delta}; \vec{E}) = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \tag{8}$$

Раскрываем оператор Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \tag{9}$$

Те же операции можно провести с левым уравнением (4) и получить:

$$\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \tag{10}$$

Это типичные волновые уравнения. Легко найти фазовую скорость – ее квадрат равен единице, деленой на коэффициент перед производной по времени в волновом уравнении:

$$\frac{1}{v^2} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}, \quad v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \tag{11}$$

В вакууме скорость электромагнитных волн совпадает со скоростью света в вакууме.